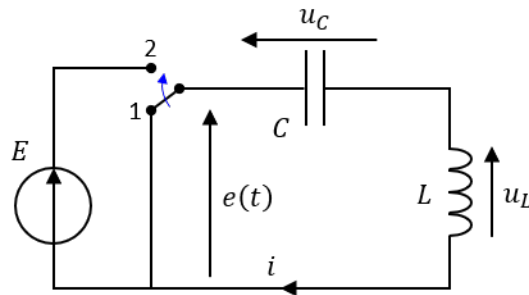

CHAPITRE E3 – CIRCUITS DU SECOND ORDRE : OSCILLATEURS ÉLECTRIQUES

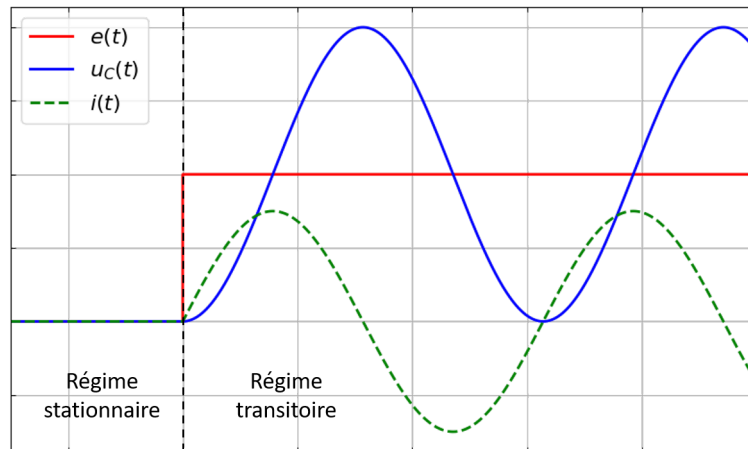
I) Circuit LC : oscillateur harmonique

1) Observations expérimentales

On considère le circuit suivant. L'interrupteur est en position 1 et un régime stationnaire est atteint. En $t = 0$, on bascule l'interrupteur en position 2.



Observations expérimentales :

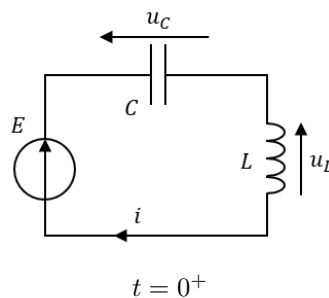
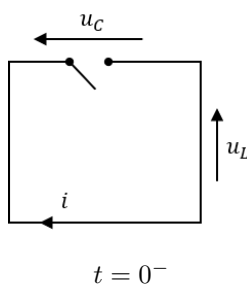


Le circuit LC est soumis à un échelon de tension ($0 \rightarrow E$).

Pour $t \rightarrow \infty$, les grandeurs ne deviennent pas constantes : le circuit n'atteint pas un régime stationnaire.

On constate que $u_C(t)$ et $i(t)$ sont continues (cf. chapitre E1).

2) Analyse des conditions initiales



Pour $t < 0$: régime stationnaire. On rappelle que le condensateur se comporte comme un circuit ouvert et la bobine comme un fil électrique.

- Circuit ouvert : $i(0^-) = 0$
- Bobine : $u_L(0^-) = 0$
- Loi des mailles : $0 = u_C + u_L \Rightarrow u_C(0^-) = 0$

Il est nécessaire de faire cette étape pour déterminer les expressions en $t = 0^+$.

- Continuité de u_C : $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$
- Continuité de i : $i(0^+) = i(0^-) = 0$
- Loi des mailles : $E = u_C + u_L \Rightarrow u_L(0^+) = E$

3) Équation différentielle sur $u_C(t)$

Loi des mailles :

$$E = u_C + u_L = u_C + L \frac{di}{dt} = u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

On obtient une équation différentielle d'ordre 2. Mettons l'ED sous sa forme canonique (cf. chapitre D2) :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E}{LC}$$

On identifie la **pulsation propre** du circuit LC : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

4) Résolution

La solution de l'équation homogène est (cf. chapitre D2) :

$$u_C(t) = \underbrace{A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)}_{\text{SEH}} + \underbrace{\frac{E}{LC}}_{\text{SP}}$$

On détermine les constantes A et B à l'aide des conditions initiales $u_C(0^+)$ et $\dot{u}_C(0^+)$.

$$u_C(0^+) = 0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I.2}}}{A} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ED}}}{E} \Rightarrow \boxed{A = -E}$$

Pour calculer $\dot{u}_C(0^+)$, calculer $\dot{u}_C(t)$ puis appliquer la relation trouvée en $t = 0^+$ (ne pas faire les deux simultanément, c'est source d'erreur).

$$\dot{u}_C(t) = \frac{i(t)}{C} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \dot{u}_C(0^+) = 0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I.2}}}{-A\omega_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ED}}}{B\omega_0} \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

Bilan :

$$\boxed{u_C(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))} \quad \forall t > 0$$

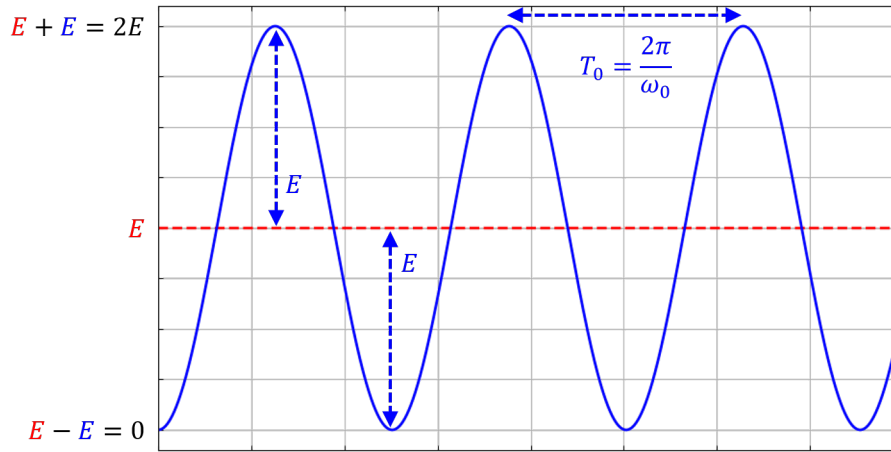
5) Représentation graphique

Traçons la courbe :

$$u_C(t) = \textcolor{red}{E} - \textcolor{blue}{E} \cos(\omega_0 t) \quad \text{avec : } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Il s'agit d'une fonction cosinus de **période** T_0 , renversée (signe « - »), d'**amplitude** $\textcolor{blue}{E}$ et de **valeur moyenne** (ie. décalée de) $\textcolor{red}{E}$.

Allure de la courbe :



On appelle **période propre** du circuit la grandeur :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

6) Étude de $i(t)$ et $u_L(t)$

On pourrait refaire un travail similaire pour $i(t)$ et $u_L(t)$: loi des mailles, ED, résolution.

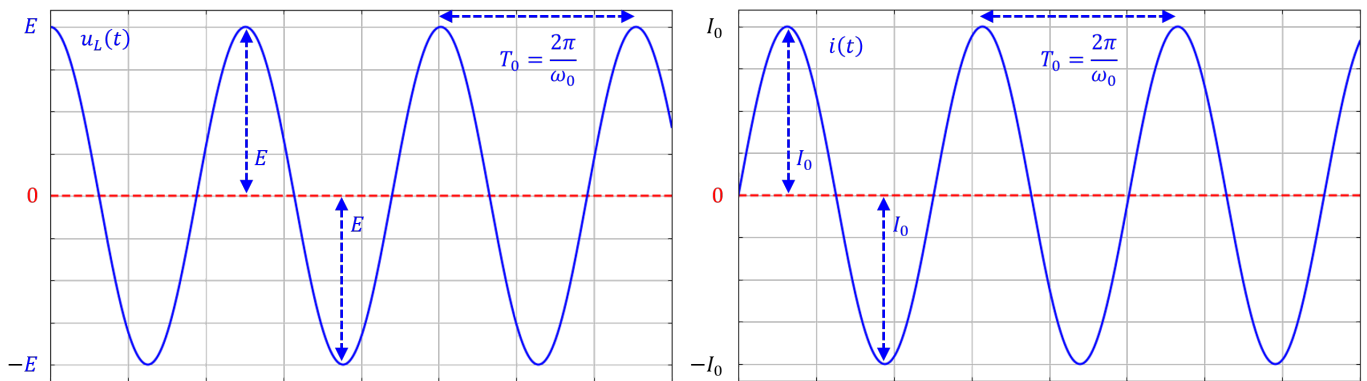
Mais puisque l'on connaît déjà $u_C(t)$, alors on a immédiatement :

$$\begin{cases} E = u_C + u_L \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases} \quad \text{avec : } u_C(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t)) \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ainsi,

$$u_L(t) = E \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad i(t) = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) = \underbrace{E\sqrt{\frac{C}{L}}}_{= I_0} \sin(\omega_0 t)$$

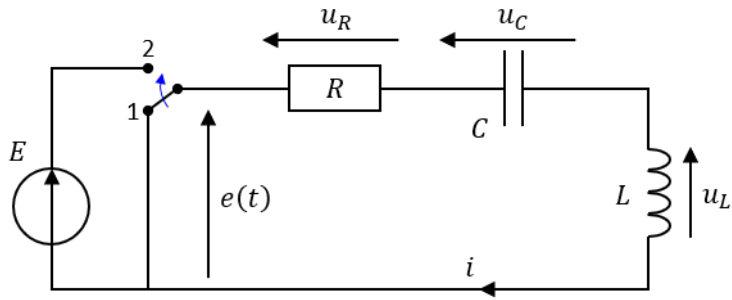
Représentation graphique :



II) Circuit RLC : oscillateur amorti

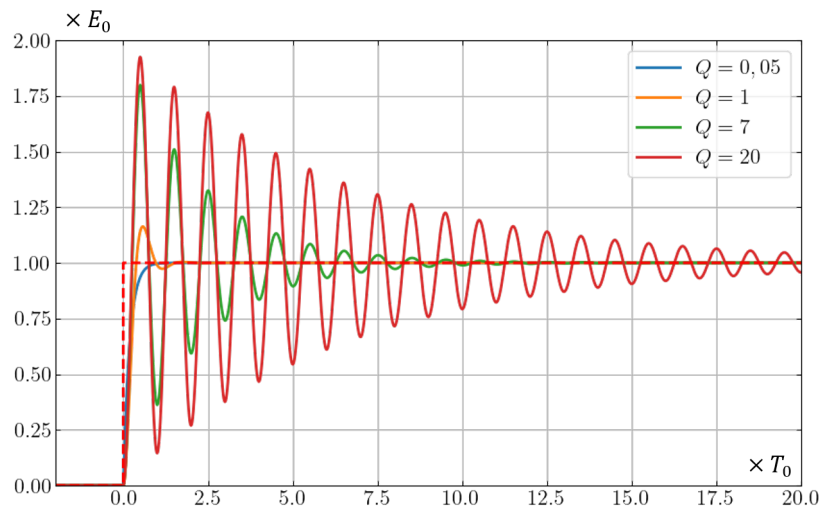
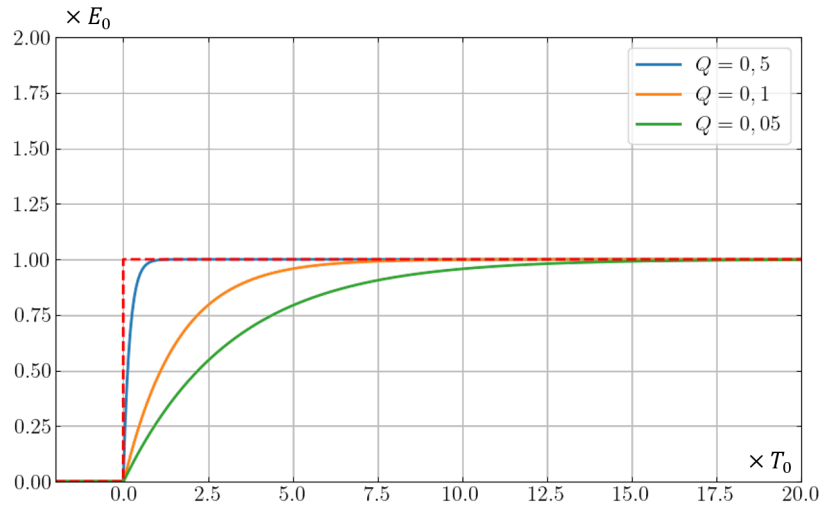
1) Observations expérimentales

On considère le circuit suivant. L'interrupteur est en position 1 et un régime stationnaire est atteint. En $t = 0$, on bascule l'interrupteur en position 2.



Observations expérimentales :

🔧 Programme Python : Solutions_RLC.py

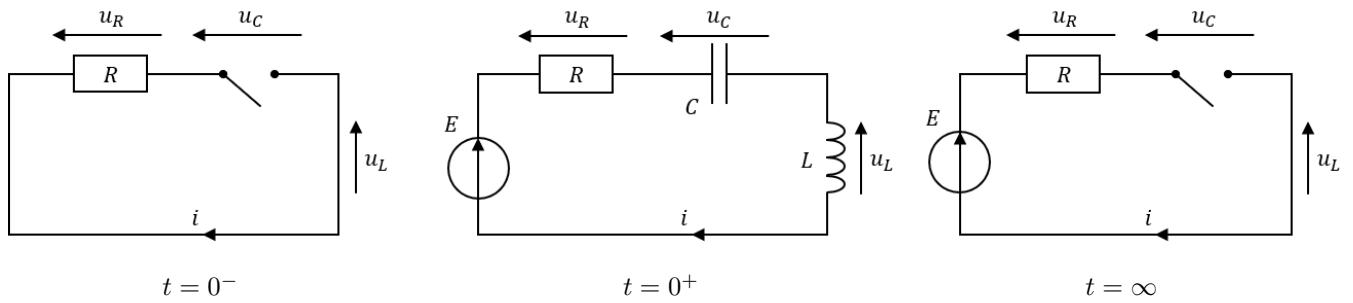


Le circuit RLC est soumis à un échelon de tension ($0 \rightarrow E$).

On pose : $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Pour toute valeur de Q , on tend vers un régime stationnaire lorsque $t \rightarrow \infty$. Mais la nature du régime transitoire dépend de la valeur de Q . On observe des oscillations amorties uniquement pour $Q > 0,5$. On observe que le système tend vers un comportement d'oscillateur harmonique lorsque $Q \rightarrow \infty$.

2) Analyse des régimes stationnaires



Pour $t < 0$: régime stationnaire. On rappelle que le condensateur se comporte comme un circuit ouvert et la bobine comme un fil électrique.

- Circuit ouvert : $i(0^-) = 0$
- Bobine : $u_L(0^-) = 0$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri \Rightarrow u_R(0^-) = 0$
- Loi des mailles : $0 = u_R + u_C + u_L \Rightarrow u_C(0^-) = 0$

Il est nécessaire de faire cette étape pour déterminer les expressions en $t = 0^+$.

- Continuité de u_C : $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$
- Continuité de i : $i(0^+) = i(0^-) = 0$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri \Rightarrow u_R(0^+) = 0$
- Loi des mailles : $E = u_R + u_C + u_L \Rightarrow u_L(0^+) = E$

Pour $t \rightarrow \infty$: régime stationnaire.

- Circuit ouvert : $i(\infty) = 0$
- Bobine : $u_L(\infty) = 0$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri \Rightarrow u_R(\infty) = 0$
- Loi des mailles : $E = u_R + u_C + u_L \Rightarrow u_C(\infty) = E$

3) Équation différentielle sur $u_C(t)$

Loi des mailles :

$$E = u_R + u_C + u_L = Ri + u_C + L \frac{di}{dt} = RC \frac{du_C}{dt} + u_C + LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$$

On obtient une équation différentielle d'ordre 2. Mettons l'ED sous sa forme canonique (cf. chapitre D2) :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{= \omega_0/Q} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E}{LC}$$

On identifie la **pulsation propre** du circuit RLC : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et le **facteur de qualité** :

$$\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{L}{R} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Il s'agit d'un nombre sans dimension.

On constate mathématiquement (cf. chapitre D2) qu'il existe 3 régimes transitoires selon la valeur de Q :

- Si $Q > 1/2 \rightarrow$ **régime pseudo-périodique**
- Si $Q < 1/2 \rightarrow$ **régime apériodique**

◦ Si $Q = 1/2 \rightarrow$ **régime critique**

Dans la suite, on pose :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \sqrt{|\omega_0^2 - \lambda^2|}$$

4) Solution en régime pseudo-périodique

On est dans le cas où $Q > 1/2$. La solution de l'équation homogène est (cf. chapitre D2) :

$$u_C(t) = \underbrace{e^{-\lambda t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]}_{\text{SEH}} + \underbrace{\frac{E}{\Omega}}_{\text{SP}}$$

On détermine les constantes A et B à l'aide des conditions initiales $u_C(0^+)$ et $\dot{u}_C(0^+)$.

$$\underbrace{u_C(0^+)}_{\substack{\uparrow \\ \text{II.2}}} = 0 = \underbrace{A + E}_{\substack{\uparrow \\ \text{ED}}} \Rightarrow \boxed{A = -E}$$

Pour calculer $\dot{u}_C(0^+)$, calculer $\dot{u}_C(t)$ puis appliquer la relation trouvée en $t = 0^+$ (ne pas faire les deux simultanément, c'est source d'erreur).

$$\dot{u}_C(t) = \frac{\dot{i}(t)}{C} = -\lambda e^{-\lambda t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + e^{-\lambda t} [-A \Omega \sin(\Omega t) + B \Omega \cos(\Omega t)]$$

Donc :

$$\underbrace{\dot{u}_C(0^+)}_{\substack{\uparrow \\ \text{II.2}}} = 0 = -\lambda A + B \Omega \Rightarrow \boxed{B = \frac{\lambda A}{\Omega} = -\frac{\lambda E}{\Omega}}$$

Bilan :

$$\boxed{u_C(t) = E - E e^{-\lambda t} \left[\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \sin(\Omega t) \right]} \quad \forall t > 0$$

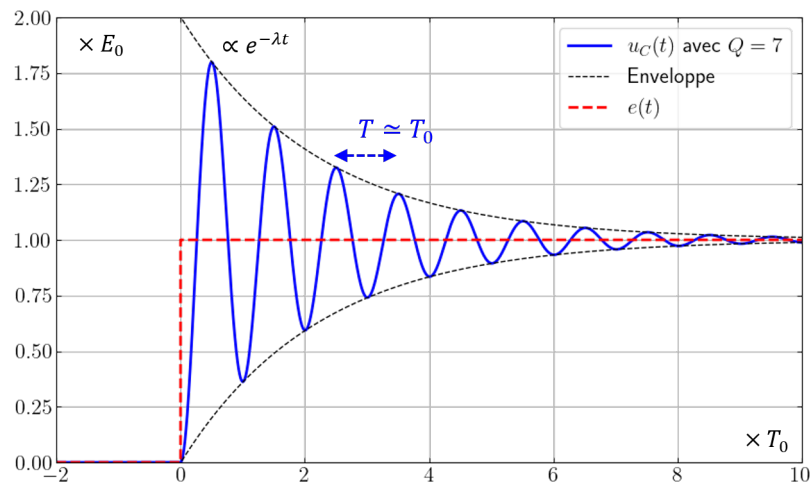
On rappelle l'équivalence entre les deux formes suivantes :

$$e^{-\lambda t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] = e^{-\lambda t} \times U_m \cos(\Omega t + \phi) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} U_m = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \tan(\phi) = -\frac{B}{A} \end{cases}$$

Ainsi, la SEH s'écrit comme le produit d'une **enveloppe** et d'un cosinus (qui oscille entre -1 et $+1$) :

$$\text{SEH : } \underbrace{U_m e^{-\lambda t}}_{\text{env.}} \times \cos(\Omega t + \phi)$$

En ajoutant la SP, on obtient :



On appelle :

- Ω la **pseudo-pulsation**

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} < \omega_0$$

Dans le cas où $Q \gg 1/2$, on constate que $\Omega \rightarrow \omega_0$.

- $T = \frac{\Omega}{2\pi}$ la **pseudo-période**.
- $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$ le **facteur d'amortissement**. Il dicte la rapidité de la décroissance de l'enveloppe exponentielle. On en déduit le temps caractéristique du régime transitoire :

$$e^{-\lambda t} = e^{-t/\tau_{pp}} \Rightarrow \tau_{pp} = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0}$$

Plus Q est grand, plus τ_{pp} est grand. On peut montrer que Q représente environ le nombre d'oscillations visibles.

Remarque :

Lorsque $Q \rightarrow \infty$, l'oscillateur tend vers un OH : $\Omega \rightarrow \omega_0$ (pulsation propre), $\tau_{pp} \rightarrow \infty$ (régime transitoire infini, aucune décroissance des oscillations).

5) Solution en régime aperiodique

On est dans le cas où $Q < 1/2$. La solution de l'équation homogène est (cf. chapitre D2) :

$$u_C(t) = \underbrace{e^{-\lambda t} [A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t)]}_{\text{SEH}} + \underbrace{\frac{E}{\Omega}}_{\text{SP}}$$

On détermine les constantes A et B à l'aide des conditions initiales $u_C(0^+)$ et $\dot{u}_C(0^+)$.

$$u_C(0^+) = 0 = A + E \Rightarrow \boxed{A = -E}$$

$\uparrow_{\text{H.2}} \quad \uparrow_{\text{ED}}$

Pour calculer $\dot{u}_C(0^+)$, calculer $\dot{u}_C(t)$ puis appliquer la relation trouvée en $t = 0^+$ (ne pas faire les deux simultanément, c'est source d'erreur).

$$\dot{u}_C(t) = \frac{i(t)}{C} = -\lambda e^{-\lambda t} [A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t)] + e^{-\lambda t} [A\Omega \operatorname{sh}(\Omega t) + B\Omega \operatorname{ch}(\Omega t)]$$

Donc :

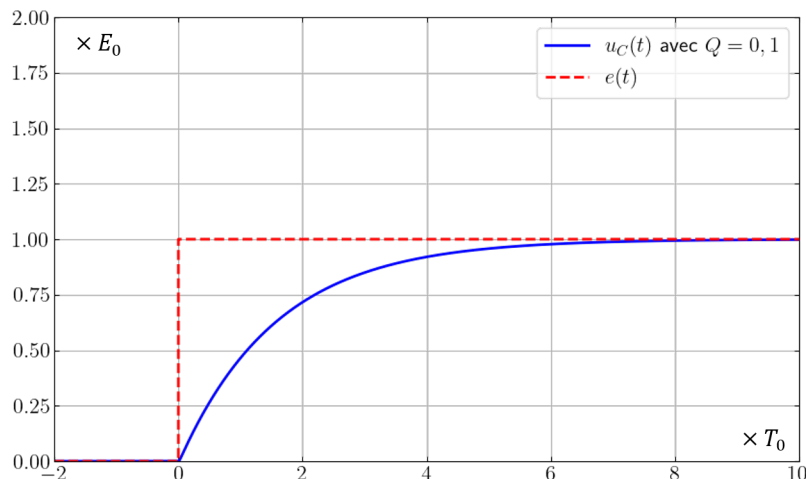
$$\dot{u}_C(0^+) = 0 = -\lambda A + B\Omega \Rightarrow \boxed{B = \frac{\lambda A}{\Omega} = -\frac{\lambda E}{\Omega}}$$

$\uparrow_{\text{H.2}} \quad \uparrow_{\text{ED}}$

Bilan :

$$\boxed{u_C(t) = E - E e^{-\lambda t} \left[\operatorname{ch}(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \operatorname{sh}(\Omega t) \right]} \quad \forall t > 0$$

Allure de graphe :



On admet que le temps caractéristique du régime transitoire vaut (dans le cas où $Q \ll 1/2$) :

$$\tau_{\text{ap}} = \frac{1}{\omega_0 Q}$$

Remarque :

Ici, Ω joue plus le rôle de « pulsation ». Il n'y a aucun dépassement de la valeur finale, aucune oscillation. Plus Q est petit, plus τ_{ap} est grand.

6) Solution en régime critique

On est dans le cas où $Q = 1/2$. La solution de l'équation homogène est (cf. chapitre D2) :

$$u_C(t) = \underbrace{(A + Bt)e^{-\omega_0 t}}_{\text{SEH}} + \underbrace{E}_{\text{SP}}$$

On détermine les constantes A et B à l'aide des conditions initiales $u_C(0^+)$ et $\dot{u}_C(0^+)$.

$$u_C(0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{II.2}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ED}}}{=} A + E \Rightarrow \boxed{A = -E}$$

Pour calculer $\dot{u}_C(0^+)$, calculer $\dot{u}_C(t)$ puis appliquer la relation trouvée en $t = 0^+$ (ne pas faire les deux simultanément, c'est source d'erreur).

$$\dot{u}_C(t) = \frac{i(t)}{C} = -\omega_0 (A + Bt)e^{-\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t}$$

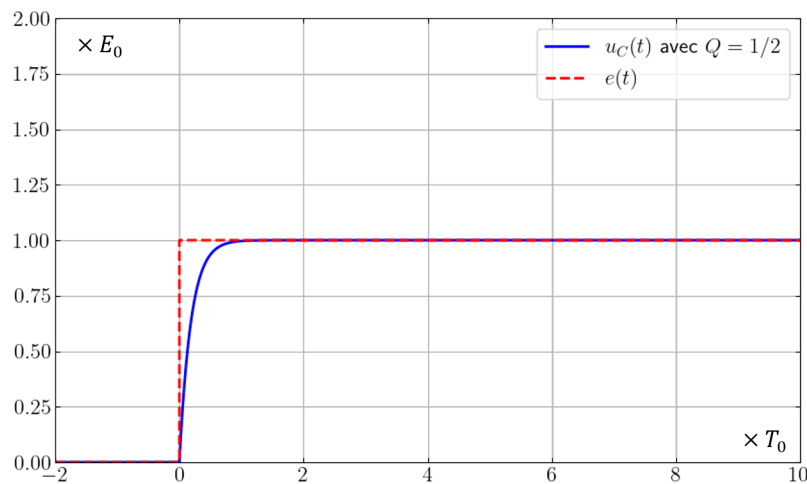
Donc :

$$\dot{u}_C(0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{II.2}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ED}}}{=} -\omega_0 A + B \Rightarrow \boxed{B = \omega_0 A = -\omega_0 E}$$

Bilan :

$$\boxed{u_C(t) = E - E(\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}}$$

Allure de graphe :



On en déduit le temps caractéristique du régime transitoire :

$$e^{-\omega_0 t} = e^{-t/\tau_{\text{crit}}} \Rightarrow \boxed{\tau_{\text{crit}} = \frac{1}{\omega_0}}$$

Le régime critique correspond donc au cas où le système retrouve le plus rapidement un régime stationnaire.

7) Bilan énergétique

Loi des mailles

$$E = u_R + u_C + u_L \Rightarrow Ei = Ri + u_C i + u_L i$$

On rappelle que :

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad u_L = L \frac{di}{dt}$$

On en déduit le bilan de puissance :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(ECu_C)}_{\mathcal{P}_g} = \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_{Joule}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}_{\mathcal{P}_{el}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}_{\mathcal{P}_{mag}}$$

Énergie fournie par le générateur :

$$\mathcal{E}_g = \int_0^\infty \mathcal{P}_g dt = E \int_0^\infty C \frac{du_C}{dt} dt = EC \int_0^\infty du_C = EC [u_C]_0^\infty = EC(E - 0) = CE^2$$

Énergie reçue par le condensateur :

$$\mathcal{E}_{el} = \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu_C^2 \right) dt = \int_0^\infty d \left(\frac{1}{2} Cu_C^2 \right) = \left[\frac{1}{2} Cu_C^2 \right]_0^\infty = \frac{1}{2} C (E^2 - 0^2) = \frac{1}{2} CE^2$$

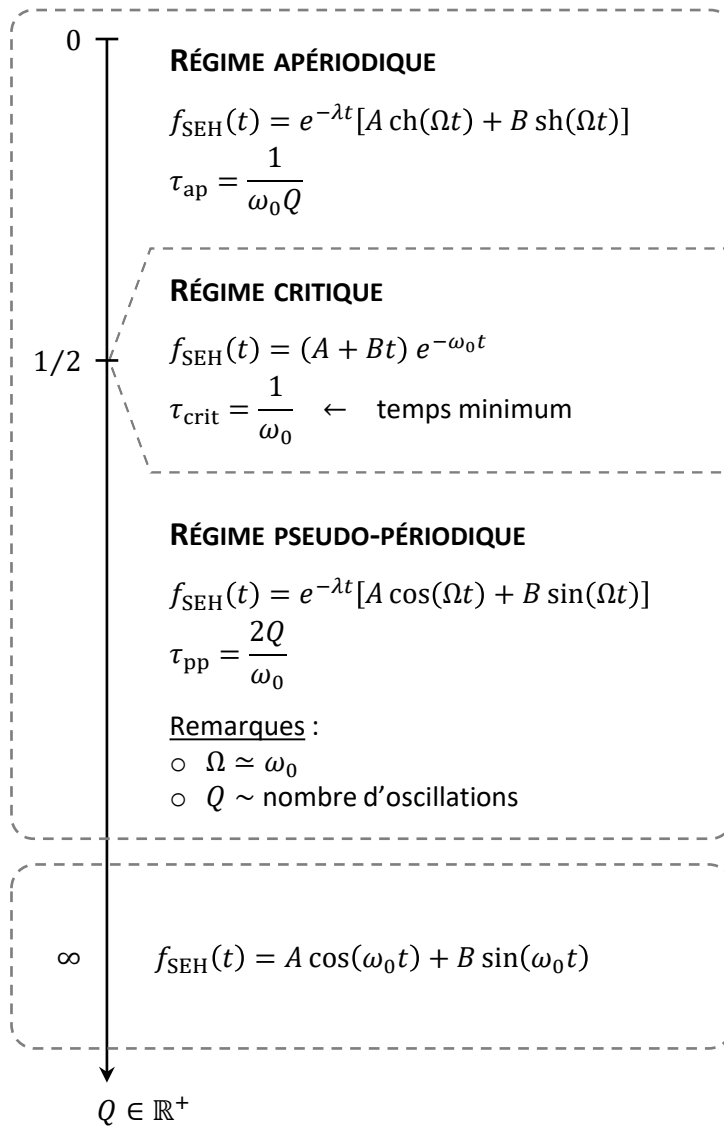
Énergie reçue par la bobine :

$$\mathcal{E}_{mag} = \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) dt = \int_0^\infty d \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = \left[\frac{1}{2} Li^2 \right]_0^\infty = \frac{1}{2} L (0^2 - 0^2) = 0$$

Énergie reçue par la résistance (dissipée par effet Joule) :

$$\mathcal{E}_J = \underbrace{\int_0^\infty Ri^2 dt}_{\text{ne pas faire ce calcul}} = \mathcal{E}_g - \mathcal{E}_{el} - \mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2} CE^2$$

La moitié de l'énergie fournie par le générateur est stockée dans le condensateur, l'autre moitié est dissipée par effet Joule dans la résistance.



OSCILLATEUR AMORTI

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{df}{dt} + \omega_0^2 f(t) = \omega_0^2 f_{\text{SP}}$$

On pose :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \sqrt{|\omega_0^2 - \lambda^2|}$$

OSCILLATEUR HARMONIQUE

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_0^2 f(t) = \omega_0^2 f_{\text{SP}}$$